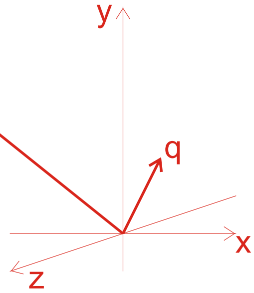
1. Der Punkt mit dem Ortsvektor $p = (-2,5,3)^T$ soll um 10 um eine Achse gedreht werden, die parallel zur z-Achse durch den Punkt $q = (1,2,0)^T$ verläuft.
Geben Sie die genauen Transformationen, die dafür erforderlich sind, in der richtigen Reihenfolge an und führen Sie diese in in drei Dimensionen aus. Geben Sie dabei alle Zahlenwerte mit drei Nachkommastellen an.



$$p = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \varphi = 10°$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, p' = p-q = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$p'' = R_z(\varphi)\, p' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cos\varphi - 3\sin\varphi \\ -3\sin\varphi + 3\cos\varphi \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}475 \\ 2{,}433 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$p''' = p'' + q = \begin{pmatrix} -2{,}475 \\ 4{,}433 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Der Punkt mit dem Ortsvektor $p = (-2,5,3)^T$ soll zunächst um den Vektor $t = (2,3,-1)^T$ verschoben und anschließend um 30 um die z-Achse gedreht werden.
Geben Sie die genauen 4×4-Transformationsmatrizen in homogenen Koordinaten an und multiplizieren Sie diese in der richtigen Reihenfolge, um die kombinierte Transformationsmatrix
zu erhalten. Führen Sie die Transformation in vier Dimensionen aus und wandeln Sie den transformierten Punkt in dreidimensionale Koordinaten um. Geben Sie dabei alle Zahlenwerte mit
drei Nachkommastellen an.

$$p = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \varphi = 30°$$

$$R_z(\varphi) * T(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 2\cos\varphi - 3\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 2\sin\varphi + 3\cos\varphi \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}88 & -0{,}5 & 0 & 0{,}232 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 & 2{,}598 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi)\, T(t)\, \tilde{p} = R_z(\varphi)\, T(t) \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5{,}928 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{p}' = \begin{pmatrix} -4 \\ 5{,}928 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ p' = \begin{pmatrix} -4 \\ 5{,}928 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Wandeln Sie den Punkt mit dem in homogenen Koordinaten gegebenen Ortsvektor p = $(8,3,6,2)^T$ in dreidimensionale Koordinaten um.

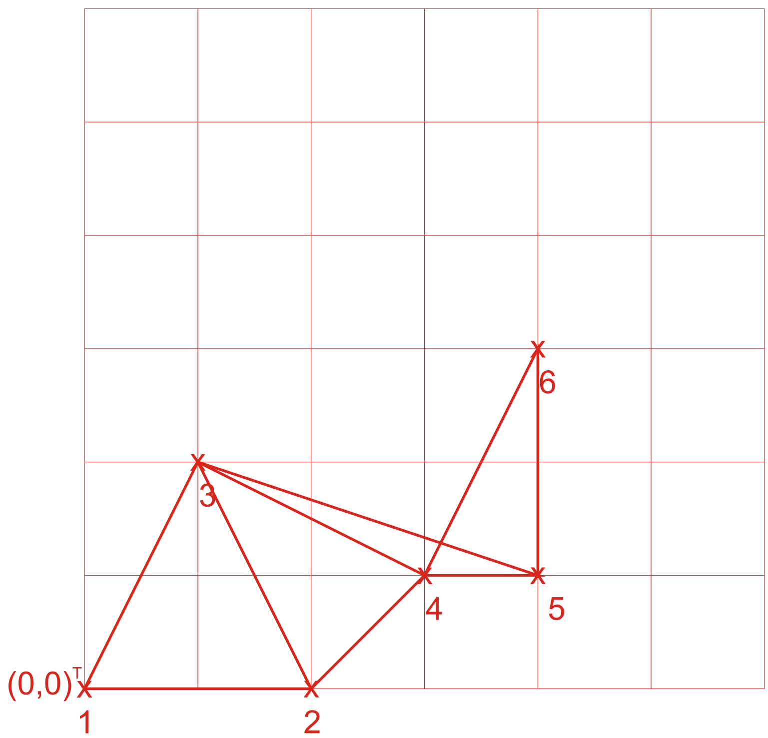
$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \; p = \begin{pmatrix} 8/2 \\ 3/2 \\ 6/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Welche Aufgabe hat die Koordinatentransformation Perspective Division in der OpenGL-Rendering-Pipeline?

Sie wandelt einen Punkt, der mit in homogenen Koordinaten gegebenem Ortsvektor angegeben ist, in dreidimensionale Koordinaten um.

6. Der folgende Ausschnitt aus einem OpenGL-Programm zeichnet einige Polygone. Skizzieren Sie die Kanten dieser Polygone. Kennzeichnen Sie dabei die Position des Ursprungs $(0,0)^T$.

```
glBegin(GL_TRIANGLE_STRIP );
glVertex3f (0.0 , 0.0 , 0.0 );
glVertex3f (2.0 , 0.0 , 0.0 );
glVertex3f (1.0 , 2.0 , 0.0 );
glVertex3f (3.0 , 1.0 , 0.0 );
glVertex3f (4.0 , 1.0 , 0.0 );
glVertex3f (4.0 , 3.0 , 0.0 );
glEnd ( ) ;
```



7.Der folgende Ausschnitt aus einem OpenGL-Programm soll die um die Sonne kreisende Erde zeichnen.

```
zeichneSonne();
glRotatef(winkelErdeSonne , 0.0 , 0.0 , 1.0 ) ;
glTranslatef( abstandErdeSonne , 0.0 , 0.0 ) ;
zeichneErde();
```

(a) In welcher Reihenfolge werden die Transformationen ausgeführt?

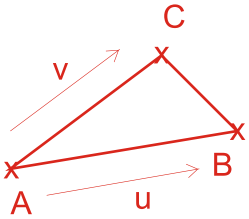
Die zuletzt definierten Transformationen kommen als erstes dran, in diesem Fall also das `glTranslatef();`

(b) Ergänzen Sie den um die Erde kreisenden Mond (Parameter winkelMondErde, abstandMondErde) und den um die Sonne kreisenden Mars (Parameter winkelMarsSonne, abstandMarsSonne). Fügen Sie an den richtigen Stellen die Befehle glPushMatrix() und glPopMatrix() ein.

```
zeichneSonne();
glPushMatrix();
  glRotatef(winkelErdeSonne, 0.0, 0.0, 1.0);
  glTranslatef(abstandErdeSonne, 0.0, 0.0);
  zeichneErde();
  glPushMatrix();
    glRotatef(winkelMondErde, 0.0, 0.0, 1.0);
    glTranslatef(abstandMondErde, 0.0, 0.0);
    zeichneMond();
  glPopMatrix();
glPopMatrix()
glPushMatrix();
  glRotatef(winkelMarsSonne, 0.0, 0.0, 1.0);
  glTranslatef(abstandMarsSonne, 0.0, 0.0);
  zeichneMars();
glPopMatrix();
```

8. Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten (Vertices) $r_A = (-1,3,2)^T$, $r_B = (3,6,2)^T$ und $r_C = (2,9,3)^T$. Berechnen Sie den Normalenvektor n und den normierten Normalenvektor $\hat{n}$ des Dreiecks.

$$r_A = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix},\ r_B = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix},\ r_C = \begin{pmatrix}2\\9\\3\end{pmatrix}$$



$$u = r_B - r_A = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$v = r_C - r_A = \begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix}$$

$$n = u \times v = \begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3*1-6*0\\0*3-4*1\\4*6-3*3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\\15\end{pmatrix}$$

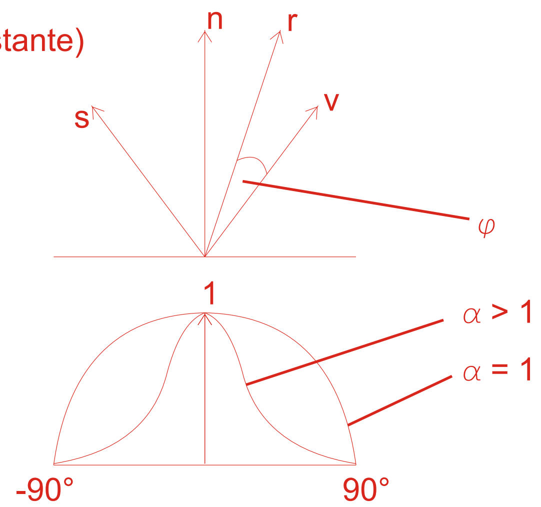
$$|n| = \sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2} = \sqrt{9+16+255} = \sqrt{250} \sim 15{,}811$$

$$\left[\begin{array}{l}\langle n, u\rangle = 3*4 - 4*3 + 15*0 = 0\\ \langle n, v\rangle = 0\end{array}\right] \qquad \hat{n} = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{15{,}811}\begin{pmatrix}3\\-4\\15\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0{,}190\\-0{,}253\\0{,}949\end{pmatrix} \qquad [|\hat{n}| = 1]$$

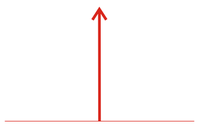
9. Beschreiben Sie die Berechnung der glänzend spiegelnden Reflexion im Phong-Beleuchtungsmodell. Fertigen Sie dazu eine Skizze an und nennen Sie die wesentlichen Parameter.

$\cos\varphi = \langle r, v \rangle$

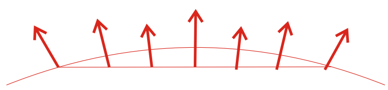
$I_r = I_s * k_s * \langle r, v \rangle^{\alpha}$ (k_s ist die Materialkonstante)



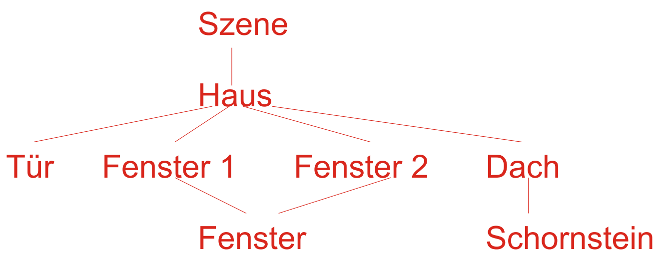
10. Erläutern Sie anhand von Skizzen den Unterschied zwischen Flat- und Gouraud-Shading.



Phong



11. Zeichnen Sie einen Szenengraphen für ein Haus mit zwei Fenstern, einer Tür und einem Dach, auf dem ein Schornstein sitzt.
Verwenden Sie die Knoten Haus (zeichnet vier Wände), Fenster (zeichnet ein Fenster), Tür, Dach (zeichnet das komplette Dach) und Schornstein. Ergänzen Sie ggf. weitere Knoten.



12. Die folgende Abbildung zeigt ein Pixelraster und eine gerade Linie zwischen zwei Endpunkten.
Markieren Sie die Pixel, die durch den Midpoint-Line-Algorithmus zur Darstellung der Linie verwendet werden.